O integrală buclucașă

Abel Cavași

December 25, 2014

Calculați
$$\int \sqrt{x^2 - 9}dx.$$

În tabelele obișnuite cu integrale (pe care mă gândesc eu că voi v-ați apucat deja să le cam învățați pe de rost) nu veți găsi această integrală, așa că ea va trebui calculată. Apoi, după ce o calculăm, dacă vreți voi s-o introduceți într-un tabel al vostru personal, eu n-am nimic împotrivă.

Bun. Deci, ce avem de făcut pentru a calcula o integrală? Scopul este să ne apropiem cât mai mult de o integrală simplă sau de mai multe integrale simple. Integralele simple sunt cele pe care le găsim în tabelul obișnuit.

Așadar, ce integrale asemănătoare găsim în tabelul obișnuit? Bineînțeles, nu ne vom uita în tabel după integrale de altă formă decât integrala noastră, ci vom căuta integrale care să aibă ceva radical în ele. Noi n-avem treabă, de exemplu, cu $\int e^x dx$.

După ce ne holbăm ceva mai lung la tabel, constatăm că există o integrală ciudată care are radical în ea și care ne spune următoarele

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} = \ln|x+\sqrt{x^2-9}|.$$

Mamăăă, da' ce mai seamănă cele două integrale! Dar, ia stați! Nu cumva a greșit autorul? Nu cumva radicalul acela din tabel ar fi trebuit să nu fie la numitor? Nici vorbă! Stați liniștiți, că e bine. Radicalul din tabel e la numitor, iar radicalul din integrala noastră este, din păcate, „la numărător”, căci poate fi scris și el ca o fracție cu numitorul egal cu 1

$$\frac{\sqrt{x^2-9}}{1}.$$

Și atunci, dată fiind situația, ce-i de făcut? Am putea să calculăm integrala noastră cu ajutorul altei integrale ce are radicalul la numitor? Ce ziceți voi? Hmmm...

Păi, ia să vedem ce putem face. Ne trebuie puțină artă. Trebuie să facem o mică șmecherie prin care să ducem radicalul acela la numitor. Urmăriți-mă cu atenție.

Oare sunteți de acord că

$$\sqrt{a} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a}} \ ?$$

Păi, de ce n-ați fi de acord? Doar putem simplifica unul dintre radicalii de la numărător cu radicalul de la numitor și ne rămâne celălalt radical dintre cei doi aflați la numărător.

Bun. Acum, dacă sunteți de acord cu șmecheria noastră, mergem mai departe. Ia priviți mai bine numărătorul. Dacă avem doi radicali din același lucru, atunci radicalul dispare. Este un fel de ciocnire de radicali, ciocnire ce duce la dispariția lor. Așadar, avem

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a.$$

Prin urmare,

$$\sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}}.$$

Țineți minte chestia asta! Puteți aduce radicalul la numitor atunci când aveți nevoie de asta. Este, de data aceasta, un fel de raționalizare a numărătorului.

Înseamnă că integrala noastră începe să aibă radical la numitor și ne apropiem de integrala din tabel.

$$\int \sqrt{x^2 - 9} dx = \int \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 9}} dx.$$

Yuppiiiii!

Hehe, ne bucurăm noi, dar ne bucurăm prea devreme, căci mai avem un drum tare lung de parcurs până la rezolvarea completă. Integrala din tabel cu radical la numitor nu are nimic la numărător. Pardon, are doar 1 la numărător, dar nicidecum $x^2 - 9$. Așa că de-acum va trebui să vedem cum ne putem descurca cu numărătorul ca să îl vedem mai simplu.

O altă mare filozofie este să despărțim fracția în două fracții mai simple. Noi știm de la fracțiile care au același numitor că

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

Așadar, obținem

$$\int \sqrt{x^2-9}dx = \int \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2-9}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} - \frac{9}{\sqrt{x^2-9}}dx.$$

Acum ne vom folosi de $\int(f+g) = \int f + \int g$, proprietate pe care o regăsiți în tabelul cu integrale. Așadar, desfacem integrala noastră complicată în două integrale mai simple. Adică

$$\int \sqrt{x^2-9}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}dx - \int \frac{9}{\sqrt{x^2-9}}dx.$$

Super! Am reușit să desfacem o integrală urâtă în două integrale ce promit să fie mai simple. Ok. Să ne ocupăm atunci de prima integrală, cea roșie. O luăm separat și vedem ce putem face cu ea. Așadar, avem de calculat integrala

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}dx.$$

La această integrală ne enervează puțin numărătorul x^2 și ca să ne calmăm puțin vom încerca să-l facem mai simplu, descompunându-l pe x^2 în $x \cdot x$. Atunci integrala va deveni

$$\int \frac{x \cdot x}{\sqrt{x^2-9}}dx.$$

Și cum

$$\frac{a \cdot b}{c} = a\frac{b}{c},$$

integrala devine

$$\int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}dx.$$

Desigur, n-am rezolvat mare lucru că am scris integrala astfel decât dacă ne gândim să o calculăm prin părți. Integrarea prin părți ne spune că dacă descoperim sub integrală un produs de două funcții, dintre care una este o derivată, atunci suntem boieri, căci avem formula

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g.$$

Așadar, pentru a calcula integrala

$$\int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}dx,$$

integrală ce constă deja dintr-un produs de două funcții, x și $\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$ trebuie să mai descoperim acolo o derivată.

Așadar, oare pe care dintre cele două funcții x și $\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$ am putea s-o scriem ca fiind derivata altei funcții? Să scriem oare $x = \left(\frac{x^2}{2}\right)'$? Aoleu! Nici vorbă! Pentru că dacă am face prostia asta, atunci a doua integrală ar presupune să derivăm cealaltă funcție $\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$ și ar ieși un talmeș-balmeș.

Așa că mai bine ne chinuim să mergem pe cealaltă pistă. Adică, să căutăm o funcție a cărei derivată să ne dea tocmai $\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$. Dar oare există așa ceva? Există oare o funcție care derivată să ne dea $\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$?

Din fericire, există! Derivând radicalul de la numitor, adică $(\sqrt{x^2-9})'$, obținem tocmai funcția dorită, adică $\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$. Cum așa? Păi n-avem decât să folosim formula

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Și la noi $u = x^2-9$. Atunci $u' = (x^2-9)' = (x^2)'-9' = 2x - 0 = 2x$. Așadar,

$$(\sqrt{x^2-9})' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}.$$

Am obținut ceva remarcabil! Am obținut acea funcție care derivată să ne dea $\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$. Acum ne putem reculege puțin, că ne-am cam împrăștiat. Ia să vedem. Avem de calculat integrala

$$\int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} dx.$$

Și am descoperit că $\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$ poate fi scrisă ca $(\sqrt{x^2-9})'$. Așadar, integrala devine acum

$$\int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} dx = \int x \cdot (\sqrt{x^2-9})' dx.$$

Calculând prin părți, obținem că

$$\int x \cdot (\sqrt{x^2-9})' dx = x \cdot \sqrt{x^2-9} - \int x' \cdot \sqrt{x^2-9} dx.$$

Dar $x' = 1$. Așadar, obținem ceva interesant. Am obținut că integrala roșie, de la care am pornit după desfacerea integralei inițiale, este

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} dx = x \cdot \sqrt{x^2-9} - \int \sqrt{x^2-9} dx.$$

Acum ne întoarcem la integrala noastră inițială (cea verde) și vedem ce am obținut. Țineți minte că am avut

$$\int \sqrt{x^2-9} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} dx - \int \frac{9}{\sqrt{x^2-9}} dx.$$

Și cum noi am calculat deja integrala roșie, putem scrie

$$\int \sqrt{x^2-9} dx = x \cdot \sqrt{x^2-9} - \int \sqrt{x^2-9} dx - \int \frac{9}{\sqrt{x^2-9}} dx.$$

Dar, vai, integrala din mijloc este tocmai integrala verde! Adică

$$\int \sqrt{x^2-9}dx = x\cdot\sqrt{x^2-9} - \int \sqrt{x^2-9}dx - \int \frac{9}{\sqrt{x^2-9}}dx.$$

Și atunci, ce ziceți, am putea să ducem integrala verde din dreapta în partea stângă, lângă sora ei geamănă? Absolut. Și ducând-o în stânga trebuie să îi schimbăm semnul, din minus în plus. Adică obținem

$$\int \sqrt{x^2-9}dx + \int \sqrt{x^2-9}dx = x\cdot\sqrt{x^2-9} - \int \frac{9}{\sqrt{x^2-9}}dx.$$

Dar adunând același lucru de două ori, obținem dublul acelui lucru. Mai exact

$$\int \sqrt{x^2-9}dx + \int \sqrt{x^2-9}dx = 2\int \sqrt{x^2-9}dx.$$

Așadar, din toată nebunia asta obținem

$$2\int \sqrt{x^2-9}dx = x\cdot\sqrt{x^2-9} - \int \frac{9}{\sqrt{x^2-9}}dx.$$

Off! Haideți să scăpăm odată și de integrala asta albastră care ne tot încurcă! Au! Dar integrala albastră este tocmai integrala din tabel, cea cu radicalul la numitor, doar că avem sus un 9 pe care îl putem scoate în fața integrale, 9 fiind o constantă. Așadar

$$\int \frac{9}{\sqrt{x^2-9}}dx = 9\ln|x+\sqrt{x^2-9}|.$$

Am scăpat, deci și de integrala albastră. Adică, putem scrie

$$2\int\sqrt{x^2-9}dx = x\cdot\sqrt{x^2-9}-9\ln|x+\sqrt{x^2-9}|+C.$$

Ce? Cum? Am terminat? Am găsit integrala verde din enunț? Aproape. Ne mai încurcă 2-ul acela din fața ei. Atunci împărțim toată egalitatea precedentă cu 2 și obținem în final

$$\int\sqrt{x^2-9}dx = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-9}-\frac{9}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-9}|+C.$$

Mamma mia! Acuma văd cât v-am chinuit pentru această integrală! Păi, iertați-mă, dar n-am găsit o cale mai ușoară...