1. **Altersbestimmung mit der Radiocarbon (^{14}C) Methode (Staatsexamenaufgabe)**
Nach einer chemischen Analyse enthält ein Holzsplitter eines archäologischen Fundes 1,2 g Kohlenstoff. Mit einem Zählrohr registriert man 845 Zerfälle/Stunde. Ziel dieser Aufgabe ist es, das Alter des Holzsplitters zu bestimmten.

(a) Stellen Sie die Differntialgleichung für den radioaktiven Zerfall auf und leiten Sie das radioaktive Zerfallsgesetz her.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &\sim N \\ \Rightarrow \mathrm{d}N &= -\lambda N \,\mathrm{d}t \\ \frac{1}{N}\,\mathrm{d}N &= -\lambda \,\mathrm{d}t \\ \ln N &= -\lambda t + c \\ \Rightarrow N &= e^{-\lambda t + c} \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} N(0) = N_0 &= e^{-\lambda 0 + c} \\ &= e^{c} \\ &\Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

(b) Gewinnen Sie daraus den Zusammenhang zwischen der Zerfallskonstanten λ und der Halbwertszeit $t_{1/2}$.

$$\begin{aligned} N(t_{1/2}) &= \frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} \\ \Rightarrow \ln\frac{1}{2} &= -\lambda t_{1/2} \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \end{aligned}$$

(c) Erklären Sie in Worten das Prinzip der ^{14}C-Methode

- in abgestorbenen Organismen nimmt die Menge an gebundenen ^{14}C gemäß dem Zerfallsgesetz ab, da kein neuer Kohlenstoff aus der Umgebung aufgenommen wird
- unter Berücksichtigung des ursprünglichen Verhältnisses von $\frac{^{14}\mathrm{C}}{^{12}\mathrm{C}}$ kann über die Radioaktivität auf das Alter geschlossen werden

(d) Berechnen Sie die Anzahl der ^{12}C-Atome im Splitter. Berechnen Sie dann die beim Absterben des Baumes im Holzsplitter vorhandene Anzahl von ^{14}C-Atomen und deren Anzahl heute bei der Untersuchung mit dem Zählrohr sowie das Alter des Holzsplitters.

$$\begin{aligned} N^{^{12}\mathrm{C}}(t_0) &\approx 1{,}2\,\mathrm{g}\frac{6{,}022\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}}{12\,\mathrm{g\,mol}^{-1}} = 6{,}022\cdot 10^{22} = N_0^{^{12}\mathrm{C}} \\ N_0^{^{14}\mathrm{C}} &= \frac{N_0^{^{12}\mathrm{C}}}{7{,}85\cdot 10^{11}} = 7{,}671\cdot 10^{10} \\ \frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} &= -\lambda N(t) = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} = -A(t) \\ &\Leftrightarrow -\lambda t = \ln\left(\frac{A(t)}{\lambda N_0}\right) \\ &\Leftrightarrow t = -\ln\left(\frac{A(t)}{\lambda N_0}\right)\frac{1}{\lambda} = -\ln\left(\frac{A(t)\cdot t_{1/2}}{\ln 2\cdot N_0}\right)\frac{t_{1/2}}{\ln 2} = 1868\,\mathrm{a} \end{aligned}$$

2. **β-Zerfall des Tritiums**
   Tritium ${}^3_1$H ist mit $B({}^3_1\mathrm{H}) = 8{,}4818\,\mathrm{MeV}$ stärker gebunden als ${}^3_2$He mit $B({}^3_2\mathrm{He}) = 7{,}7181\,\mathrm{MeV}$

   (a) Wieso kann ${}^3_1$H trotzdem durch β-Zerfall in ${}^3_2$He übergehen?
   Zerfall:

$$ {}^3_1\mathrm{H} \longrightarrow {}^3_2\mathrm{He}^+ + e^- + \overline{\nu_e} $$

$$ \begin{aligned} \mathcal{M}({}^3_1\mathrm{H}) &= m_p + 2m_n - \frac{B({}^3_1\mathrm{H})}{c^2} \\ \mathcal{M}({}^3_2\mathrm{He}) &= 2m_p + m_n - \frac{B({}^3_2\mathrm{He})}{c^2} \\ \Delta E &= \frac{\mathcal{M}({}^3_1\mathrm{H}) - \mathcal{M}({}^3_2\mathrm{He}) - m_e}{c^2} = 18{,}6\,\mathrm{keV} > 0 \end{aligned} $$

   Da Neutronen schwerer als Protonen sind, wird insgesamt Energie frei, so dass der Zerfall stattfinden kann.

   (b) Bestimmen Sie die β-Grenzenergie E_0 und die maximale Rückstoßenergie von ${}^3_2$He für den Fall einer verschwindenden Neutrinomasse $m_\nu = 0$! Wieso können Sie hier nicht-relativistisch rechnen? (Lösung: $E_0 = 18{,}6\,\mathrm{keV}$, $E({}^3_2\mathrm{He}) = 3{,}3\,\mathrm{eV}$)
   Im Grenzfall geht die ganze im Zerfall entstandene Energie an das Elektron:

$$ E_0 = \Delta E - E_{\mathrm{kin,He}} $$

   Es ist gerechtfertigt nicht-relativistisch zu rechnen, da: $E_0 < \Delta E \ll m_\beta c^2$
   Rückstoß:

$$ \begin{aligned} p_\beta &= p_{\mathrm{He}} \\ m_\beta v_\beta &= m_{\mathrm{He}} v_{\mathrm{He}} \\ \Rightarrow v_{\mathrm{He}} &= \frac{m_\beta v_\beta}{m_{\mathrm{He}}} \\ \Delta E &= E_{\mathrm{kin},\beta} + E_{\mathrm{kin,He}} = \frac{1}{2} m_\beta v_\beta^2 + \frac{1}{2} m_{\mathrm{He}} v_{\mathrm{He}}^2 \\ &= \frac{1}{2} m_\beta v_\beta^2 + \frac{1}{2} m_{\mathrm{He}} \left(\frac{m_\beta v_\beta}{m_{\mathrm{He}}} \right)^2 \\ &= E_0 + E_0 \cdot \frac{m_\beta}{m_{\mathrm{He}}} \\ E_0 &= \Delta E \underbrace{\left(\frac{1}{1 + \frac{m_\beta}{m_{\mathrm{He}}}} \right)}_{=0{,}999\,863} \approx 18{,}597\,\mathrm{keV} \\ E_{\mathrm{kin,He}} &= E_0 - \Delta E \approx 3\,\mathrm{eV} \end{aligned} $$

   (c) Wie ändert sich E_0, wenn das Elektronneutrino ν_e eine Masse $m_\nu > 0$ hat?
   $m_\nu \neq 0$: $\quad E_0 = E_0 - E_\nu = E_0 - m_\nu c^2$

3. **α-Zerfall von ${}^{210}_{84}$Po**

   (a) Brechnen Sie die beim Zerfall frei werdende Energie Q_α

$$ Q_\alpha = \big(\mathcal{M}({}^{210}_{84}\mathrm{Po}) - 84m_e - \big(\mathcal{M}({}^{206}_{82}\mathrm{Pb}) - 82m_e\big) - \big(\mathcal{M}({}^4_2\mathrm{He}) - 2m_e\big)\big)c^2 = 5{,}407\,\mathrm{MeV} $$

   (b) Wie groß ist die kinetische Energie des α-Teilchen unter Berücksichtigung des Kernrückstoßes?
   Unter Berücksichtigung von 2b:

$$ E_{\mathrm{kin},\alpha} = Q_\alpha \left(\frac{1}{1 + \frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Pb}}}} \right) = 5{,}304\,\mathrm{MeV} $$